第5講・式の計算⑤ 展開・因数分解の利用

要点整理

１　倍数になることの説明問題

たとえば３の倍数であることを説明する

・数を文字でおく

・文意にしたがって式変形(展開・因数分解)する

・３×(整数)であることを示す

２　式の値を求める問題

式を簡単にしてから数を代入する

例題 1　次の問いに答えなさい。

⑴　連続した2つの奇数の平方の差は，8の倍数になることを証明しなさい。

⑵「連続する3つの整数において，最も大きい整数とまん中の整数の積から最も小さい整数の2乗をひいた数に1をたした数は，3でわりきれる」ことを証明せよ。ただし，最も小さい整数を n とする。

例題 2　次の問いに答えなさい。

⑴　$a=1.5$，$b=8.5$ のとき，$a^2+2ab+b^2$ の値を求めよ。

⑵　$x+y=-3$，$x-y=5$ のとき，$3x^2-3y^2$ の値を求めよ。

問題

5-1　連続した3つの奇数の2乗の和に1を加えた数は，12の倍数であることを証明しなさい。

5-2　次の問いに答えなさい。

(1)　$x=1.73$，$y=0.27$ のとき，$x^2+y^2+2xy-x-y$ の値を求めよ。

(2)　$a-b=1$ のとき，$a^2-3a+b^2+3b-2ab+3$ の値を求めよ。

< *Note* >

第５講・確認テスト

[1]　連続する３つの整数において，最小の数の平方と中央の数の平方の和に４を加えた数から最大の数の平方をひいた差は，ある整数の平方となることを，次のように証明した。このとき，［ア］～［ケ］にあてはまる数を求めなさい。

［証明］　連続する３つの整数の中央の数を n とすると，最小の数は $n-$［ア］，最大の数は $n+$［イ］と表される。

最小の数の平方と中央の数の平方の和に４を加えた数から最大の数の平方をひいた差は，

$(n-\boxed{ア})^2+n^2+4-(n+\boxed{イ})^2$

$=n^2-\boxed{ウ}\,n+\boxed{エ}+n^2+4-(n^2+\boxed{オ}\,n+\boxed{カ})$

$=n^2-\boxed{キ}\,n+\boxed{ク}$

$=(n-\boxed{ケ})^2$

よって，連続する３つの整数において，最小の数の平方と中央の数の平方の和に４を加えた数から最大の数の平方をひいた差は，ある整数の平方となる。

[2]　次の［コ］～［ハ］にあてはまる数を求めなさい。

(1)　$x=1.57$，$y=0.19$ のとき，$x^2-6xy+9y^2-x+3y+1$ の値を因数分解を利用して求めると，$x^2-6xy+9y^2-x+3y+1=(x-\boxed{コ}\,y)(x-\boxed{コ}\,y-1)+1$

$=\boxed{サ}\times\boxed{シ}+1$

$=\boxed{ス}$

(2)　$a+b=1$，$ab=-3$ のとき，$a^2b^3+a^3b^2$ の値を因数分解を利用して求めると，

$a^2b^3+a^3b^2=a^{\boxed{セ}}b^{\boxed{ソ}}(b+a)$

$=(-\boxed{タ})^{\boxed{チ}}\times\boxed{ツ}$

$=\boxed{テ}$

(3)　$a-b=-4$ のとき，$a^2-2ab+b^2-5a+5b-6$ の値を因数分解を利用して求めると，

$a^2-2ab+b^2-5a+5b-6=(a-b+\boxed{ト})(a-b-\boxed{ナ})$

$=(-\boxed{ニ})\times(-\boxed{ヌネ})$

$=\boxed{ノハ}$

< *Note* >

第5講・式の計算⑤ 展開・因数分解の利用

例題 1

(1)　n を整数とすると，連続した２つの奇数は $2n-1$，$2n+1$ と表される。（$2n+1$，$2n+3$ でもよい。）

これらの平方の差は，$(2n+1)^2-(2n-1)^2=4n^2+4n+1-(4n^2-4n+1)=8n$（8 の整数倍。）

よって，８の倍数になる。

(2)　証明 最も小さい整数を n とするとき，連続する３つの整数は，n，$n+1$，$n+2$ と表される。

$(n+2)(n+1)-n^2+1=n^2+3n+2-n^2+1=3n+3=3(n+1)$

$n+1$ は整数だから $3(n+1)$ は３の倍数である。

例題 2

(1)　**100**　　(2)　**−45**

解説

(1)　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=10^2=100$

(2)　$3x^2-3y^2=3(x^2-y^2)=3(x+y)(x-y)=3\times(-3)\times5=-45$（式を因数分解してから数値を代入。）

5−1

証明 n を整数とすると，連続した３つの奇数は，$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$ と表せるから，これら３つの奇数の２乗の和に１を加えた数は，

$(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1=12n^2+12n+12=12(n^2+n+1)$

n^2+n+1 は整数なので，$12(n^2+n+1)$ は 12 の倍数である。

5−2

(1)　**2**　　(2)　**1**

解説

(1)　与式 $=(x+y)^2-(x+y)=(x+y)(x+y-1)=2\times(2-1)=2$

(2)　与式 $=(a^2-2ab+b^2)-3a+3b+3=(a-b)^2-3(a-b)+3=1-3+3=1$

第５講・確認テスト

[1]　連続する３つの整数において，最小の数の平方と中央の数の平方の和に４を加えた数から最大の数の平方をひいた差は，ある整数の平方となることを，次のように証明した。このとき，[ア]～[ケ]にあてはまる数を求めなさい。

[証明]　連続する３つの整数の中央の数を n とすると，最小の数は $n-$[ア]，最大の数は $n+$[イ]と表される。

最小の数の平方と中央の数の平方の和に４を加えた数から最大の数の平方をひいた差は，

$(n-$[ア]$)^2+n^2+4-(n+$[イ]$)^2$

$=n^2-$[ウ]$n+$[エ]$+n^2+4-(n^2+$[オ]$n+$[カ]$)$

$=n^2-$[キ]$n+$[ク]

$=(n-$[ケ]$)^2$

よって，連続する３つの整数において，最小の数の平方と中央の数の平方の和に４を加えた数から最大の数の平方をひいた差は，ある整数の平方となる。

[2]　次の[コ]～[ハ]にあてはまる数を求めなさい。

(1)　$x=1.57$，$y=0.19$ のとき，$x^2-6xy+9y^2-x+3y+1$ の値を因数分解を利用して求めると，$x^2-6xy+9y^2-x+3y+1=(x-$[コ]$y)(x-$[コ]$y-1)+1$

$=$[サ]$\times$[シ]$+1$

$=$[ス]

(2)　$a+b=1$，$ab=-3$ のとき，$a^2b^3+a^3b^2$ の値を因数分解を利用して求めると，

$a^2b^3+a^3b^2=a$[セ]b[ソ]$(b+a)$

$=(-$[タ]$)$[チ]$\times$[ツ]

$=$[テ]

(3)　$a-b=-4$ のとき，$a^2-2ab+b^2-5a+5b-6$ の値を因数分解を利用して求めると，

$a^2-2ab+b^2-5a+5b-6=(a-b+$[ト]$)(a-b-$[ナ]$)$

$=(-$[ニ]$)\times(-$[ヌネ]$)$

$=$[ノハ]

解答

［1］　ア　1　イ　1　ウ　2　エ　1　オ　2　カ　1　キ　4　ク　4
ケ　2

［2］　コ　3　サ　1　シ　0　ス　1　セ　2　ソ　2　タ　3　チ　2
ツ　1　テ　9　ト　1　ナ　6　ニ　3　ヌ　1　ネ　0　ノ　3
ハ　0

解説

［2］

(1)　与式$=(x-3y)^2-(x-3y)+1=(x-3y)(x-3y-1)+1$

$=(1.57-3\times0.19)\times(1.57-3\times0.19-1)+1=1\times0+1=1$

(3)　与式$=(a-b)^2-5(a-b)-6=(a-b+1)(a-b-6)=(-4+1)\times(-4-6)=-3\times(-10)$
$=30$